

ΜΑΘΗΜΑ 28

2.5 ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΚΑΙ Θ.Μ.Τ

Ασκήσεις Δύο θέσεις x_1, x_2

Ρίζες εξίσωσης

Ανισότητες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με $f(α) = β$ και $f(β) = α$. Να αποδείξετε ότι :

i) Υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

ii) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (α, β)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$

$$f(x) - x = 0$$

Θέτουμε $h(x) = f(x) - x$, $x \in [α, β]$

h συνεχής στο $[α, β]$ σα διαφορά συνεχών

$$h(α) = f(α) - α = β - α \quad \text{και} \quad h(β) = f(β) - β = α - β$$

$$\text{άρα } h(α)h(β) = -(α - β)^2 < 0$$

Bolzano $\Rightarrow$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ρίζα x_0 στο $(α, β)$

ii)

f συνεχής στο διάστημα $[α, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, x_0)$, με

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } x_1 \in (α, x_0) \text{ ώστε } f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(α)}{x_0 - α} = \frac{x_0 - β}{x_0 - α} \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως, } \text{υπάρχει } x_2 \in (x_0, β) \text{ ώστε } f'(x_2) = \frac{f(β) - f(x_0)}{β - x_0} = \frac{α - x_0}{β - x_0} \quad (2)$$

$$(1). (2) \Rightarrow f'(x_1)f'(x_2) = 1$$

$f(α) \neq f(β)$ οδηγεί σε
Θ.Μ.Τ

2.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι :

i) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $2f(x_0) = f(\alpha) + f(\beta)$.

ii) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $2f(x) = f(\alpha) + f(\beta)$
 $2f(x) - f(\alpha) - f(\beta) = 0$

Θέτουμε $h(x) = 2f(x) - f(\alpha) - f(\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$

h συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ σα διαφορά συνεχών

$h(\alpha) = 2f(\alpha) - f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha) - f(\beta)$ και

$h(\beta) = 2f(\beta) - f(\alpha) - f(\beta) = f(\beta) - f(\alpha)$

Άρα $h(\alpha)h(\beta) = -[f(\alpha) - f(\beta)]^2 < 0$

Bolzano $\Rightarrow$ Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

$$2f(x_0) - f(\alpha) - f(\beta) = 0$$

$$2f(x_0) = f(\alpha) + f(\beta) = 0$$

ii)

f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_0) , με

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $x_1 \in (\alpha, x_0)$ ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha}$

$f(\alpha) \neq f(\beta)$ οδηγεί σε
Θ.Μ.Τ

$$= \frac{\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} - f(\alpha)}{x_0 - \alpha}$$

$$= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2(x_0 - \alpha)}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{2(x_0 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

Ομοίως, υπάρχει $x_2 \in (x_0, \beta)$ ώστε $\frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2(\beta - x_0)}{f(\beta) - f(\alpha)}$

$$\text{Επομένως } \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2(x_0 - \alpha) + 2(\beta - x_0)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{2(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

3.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με $f(α) = β$ και $f(β) = α$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (α, β)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = -2$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x_0 = \frac{α+β}{2}$ το κέντρο του διαστήματος $[α, β]$

f συνεχής στο διάστημα $[α, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, x_0)$, με

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $x_1 \in (α, x_0)$ ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(α)}{x_0 - α}$

Ομοίως, υπάρχει $x_2 \in (x_0, β)$ ώστε $f'(x_2) = \frac{f(β) - f(x_0)}{β - x_0}$

$$\begin{aligned} f'(x_1) + f'(x_2) &= \frac{f\left(\frac{α+β}{2}\right) - f(α)}{\frac{α+β}{2} - α} + \frac{f(β) - f\left(\frac{α+β}{2}\right)}{β - \frac{α+β}{2}} \\ &= \frac{f\left(\frac{α+β}{2}\right) - f(α)}{\frac{β-α}{2}} + \frac{f(β) - f\left(\frac{α+β}{2}\right)}{\frac{β-α}{2}} \\ &= \frac{f(β) - f(α)}{\frac{β-α}{2}} = \frac{α-β}{\frac{β-α}{2}} = -2 \end{aligned}$$

Η ύπαρξη δύο θέσεων x_1, x_2 απαιτεί δύο διαστήματα

4.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(a) = f(b)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 0$$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x_0 = \frac{a+b}{2}$ το κέντρο του διαστήματος $[a, b]$

Η ύπαρξη δύο θέσεων x_1, x_2 απαιτεί δύο διαστήματα

f συνεχής στο διάστημα $[a, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x_0) , με

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } x_1 \in (a, x_0) \text{ ώστε } f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$$

$$\text{Ομοίως, } \text{υπάρχει } x_2 \in (x_0, b) \text{ ώστε } f'(x_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

$$\text{Αλλά } x_0 - a = b - x_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } f'(x_1) + f'(x_2) &= \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \\ &= \frac{f(x_0) - f(a) + f(b) - f(x_0)}{x_0 - a} = 0 \end{aligned}$$

5.

Συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_0 \in (a, b)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2f'(\xi_0)$$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x_0 = \frac{a+b}{2}$ το κέντρο του διαστήματος $[a, b]$

f συνεχής στο διάστημα $[a, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x_0) , με

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi_1 \in (a, x_0) \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως, } \text{υπάρχει } \xi_2 \in (x_0, b) \text{ ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } x_0 - a = b - x_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} = 2 \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad (3)$$

f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) , με

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi_0 \in (a, b) \text{ ώστε } f'(\xi_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad (4)$$

Από τις (3), (4) συμπεραίνουμε ότι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2f'(\xi_0)$

6.

Συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_0 \in (a, b)$

τέτοια ώστε $\frac{f'(\xi_1)}{f(\xi_1)} + \frac{f'(\xi_2)}{f(\xi_2)} = \frac{f'(\xi_0)}{f(\xi_0)}$.

Υπόδειξη

Θεώρησε τη συνάρτηση $h(x) = \ln f(x)$
και ακολούθησε την άσκηση 5.

Η υπόθεση $f(x) > 0$

αλλά και ο λόγος $\frac{f'(x)}{f(x)}$

υποψιάζουν συνάρτηση $\ln f(x)$

7.

Να αποδείξετε ότι το 0 είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της εξίσωσης

$$xe^x - e^x + 1 = 0$$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(0) = 0 \cdot e^0 - e^0 + 1 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{το } 0 \text{ είναι η ρίζα}$$

Έστω ότι έχει και άλλη ρίζα ρ . (Ας είναι $\rho > 0$)

f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, \rho]$ και $f(0) = f(\rho) = 0$,

με Rolle θα υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

$$\text{Αλλά } f'(x) = (xe^x - e^x + 1)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x,$$

που δεν έχει ρίζα $\neq 0$ αφού $e^x > 0$

8.

Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = \ln \frac{e}{x}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $\frac{e}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Προφανής ρίζα το 1, αφού $e^{1-1} = \ln \frac{e}{1}$

$$e^0 = \ln e$$

$$1 = \ln e \text{ που ισχύει}$$

Η εξίσωση γίνεται $e^x e^{-1} = \ln e - \ln x$

$$e^x \frac{1}{e} = 1 - \ln x$$

$$e^x = e - e \ln x$$

$$e^x + e \ln x - e = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + e \ln x - e$, $x > 0$

Έστω ότι η εξίσωση, άρα και η f , έχει και άλλη ρίζα ρ . (Ας είναι $\rho > 1$)

f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, \rho]$ και $f(1) = f(\rho) = 0$,

με Rolle θα υπάρχει $\xi \in (1, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ **(1)**

Αλλά $f'(x) = e^x + e \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα άτοπο λόγω της (1)

9.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x e^x = 1$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα και αυτή στο διάστημα $(0, 1)$

Υπόδειξη

$$x e^x = 1 \Leftrightarrow x e^x - 1 = 0, \quad f(x) = x e^x - 1, \quad \text{Bolzano και άσκηση (1)}$$

10.

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση f . Αν οι εξισώσεις $f(x) = 0$ και $f''(x) = 0$ είναι αδύνατες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Προτεινόμενη λύση

Αν ο βαθμός του πολυωνύμου f είναι περιττός v , τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v) = \ell_1 \text{ ετερόσημο του } \alpha_v \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) = \ell_2 \text{ ομόσημο του } \alpha_v$$

άρα υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $f(x_1)f(x_2) < 0$

και επειδή f συνεχής, κατά Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει ρίζα, που είναι άτοπο.

Άρα ο βαθμός του πολυωνύμου f είναι άρτιος έστω v .

Τότε ο βαθμός του πολυωνύμου f' είναι περιττός $v - 1$.

Επομένως, όπως αποδείχθηκε παραπάνω για πολώνυμο περιττού βαθμού, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζα, έστω ρ .

Έστω, τώρα, ότι η $f'(x) = 0$ έχει κι άλλη ρίζα σ (και ας είναι $\rho < \sigma$)

f' συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho, \sigma]$ σαν πολυωνυμική

και $f'(\rho) = f'(\sigma) = 0$, με Rolle θα υπάρχει $\xi \in (\rho, \sigma)$ τέτοιο, ώστε

$f''(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει δοθεί αδύνατη.

11.

Έστω παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f .

Λύση

Ονομάζουμε ρ'_1, ρ'_2 τις δύο διαδοχικές ρίζες της f' με $\rho'_1 < \rho'_2$.

Έστω ότι μεταξύ των ρ'_1, ρ'_2 η f έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho'_1 < \rho_1 < \rho_2 < \rho'_2$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$, με

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0.$$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ (άρα ξ ανήκει και στο

(ρ'_1, ρ'_2)) τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο αφού οι ρ'_1, ρ'_2 είναι

διαδοχικές ρίζες της f' .

12.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x + x - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x \ln x + x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

Προφανής ρίζα η $x = 1$, αφού $h(1) = 1 \ln 1 + 1 - 1 = 1 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$

Έστω ότι έχει κι άλλη ρίζα ρ , δηλαδή $h(\rho) = 0$

- Όταν $\rho > 1$

h συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, \rho]$,

με Θ . Rolle θα υπάρξει $\xi \in (1, \rho)$ ώστε $h'(\xi) = 0$ **(1)**

$$\text{Αλλά } h'(x) = (x \ln x + x - 1)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$$

$$\text{Οπότε } h'(\xi) = \ln \xi + 2$$

$$(1) \Rightarrow \ln \xi + 2 = 0 \Rightarrow \ln \xi = -2 \Rightarrow$$

$$\xi = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ που είναι άτοπο αφού } \xi \in (1, \rho)$$

- Όταν $\rho < 1$

$$\text{Είναι } h(\rho) = \rho \ln \rho + \rho - 1 \quad \textbf{(2)}$$

$$\rho < 1 \Rightarrow \ln \rho < 0 \Rightarrow \rho \ln \rho < 0 \quad \textbf{(3)}$$

$$\rho < 1 \Rightarrow \rho - 1 < 0 \quad \textbf{(4)}$$

$$(3) + (4) \Rightarrow \rho \ln \rho + \rho - 1 < 0$$

$$(2) \Rightarrow h(\rho) < 0 \text{ που είναι άτοπο αφού } h(\rho) = 0$$

13.

Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 8^x = 4^x + 7^x$

Προτεινόμενη λύση

Προφανείς ρίζες το 0 και το 1, αφού $3^0 + 8^0 = 4^0 + 7^0$ (δηλαδή $1 + 1 = 1 + 1$)

$$\text{και } 3 + 8 = 4 + 7$$

Έστω ότι η εξίσωση έχει και τρίτη ρίζα $\rho \neq 0$ και 1.

Τότε ο ρ την επαληθεύει, δηλαδή $3^\rho + 8^\rho = 4^\rho + 7^\rho$

$$8^\rho - 7^\rho = 4^\rho - 3^\rho \quad (1)$$

Απαγωγή
σε άτοπο

Αριθμητές κλασμάτων του Θ.Μ.Τ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^\rho$, $t \in [3, +\infty)$ (2)

$$\text{Τότε } f'(t) = \rho \cdot t^{\rho-1} \quad (3)$$

f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[3, 4]$. Κατά το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει

$$\xi_1 \in (3, 4) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} \stackrel{(1)}{=} 4^\rho - 3^\rho$$

f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[7, 8]$. Κατά το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει

$$\xi_2 \in (7, 8) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(8) - f(7)}{8 - 7} \stackrel{(1)}{=} 8^\rho - 7^\rho$$

$$\text{Η (1) γίνεται } f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \rho \xi_1^{\rho-1} = \rho \xi_2^{\rho-1} \quad (\rho \neq 0)$$

$$\xi_1^{\rho-1} = \xi_2^{\rho-1} \quad (0 < \xi_1 < \xi_2)$$

$$\xi_1 = \xi_2 \text{ που είναι άτοπο}$$

14.

Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $(\beta - \alpha) \varepsilon\varphi\alpha < \ln \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} < (\beta - \alpha) \varepsilon\varphi\beta$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $(\beta - \alpha) \varepsilon\varphi\alpha < \ln\sigma\upsilon\nu\alpha - \ln\sigma\upsilon\nu\beta < (\beta - \alpha) \varepsilon\varphi\beta$

$$-(\beta - \alpha) \varepsilon\varphi\beta < \ln\sigma\upsilon\nu\beta - \ln\sigma\upsilon\nu\alpha < -(\beta - \alpha) \varepsilon\varphi\alpha$$

$$-\varepsilon\varphi\beta < \frac{\ln\sigma\upsilon\nu\beta - \ln\sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta - \alpha} < -\varepsilon\varphi\alpha$$

Δημιουργούμε το κλάσμα του Θ.Μ.Τ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [\alpha, \beta]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $-\varepsilon\varphi\beta < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < -\varepsilon\varphi\alpha$

Είναι f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε σύνθεση αντίστοιχων συναρτήσεων.

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} (\sigma\upsilon\nu x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} (-\eta\mu x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\text{Άρα } f'(\xi) = -\varepsilon\varphi\xi$$

$$(1) \Rightarrow -\varepsilon\varphi\xi = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (2)$$

Επειδή $\alpha < \xi$ και η $h(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι γν. αύξουσα θα είναι $\varepsilon\varphi\alpha < \varepsilon\varphi\xi$

Ομοίως $\varepsilon\varphi\xi < \varepsilon\varphi\beta$

$$\text{Επομένως } \varepsilon\varphi\alpha < \varepsilon\varphi\xi < \varepsilon\varphi\beta \Rightarrow -\varepsilon\varphi\beta < -\varepsilon\varphi\xi < -\varepsilon\varphi\alpha \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$-\varepsilon\varphi\beta < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < -\varepsilon\varphi\alpha$$

15.

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\ln \frac{e^\beta + 1}{e^\alpha + 1} < \beta - \alpha$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $\ln(e^\beta + 1) - \ln(e^\alpha + 1) < \beta - \alpha$

$$\frac{\ln(e^\beta + 1) - \ln(e^\alpha + 1)}{\beta - \alpha} < 1$$

Δημιουργούμε το κλάσμα του Θ.Μ.Τ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$, $x \in [\alpha, \beta]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 1$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ σαν σύνθεση αντίστοιχων συναρτήσεων.

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ **(1)**

$$\text{Αλλά } f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} (e^x + 1)' = \frac{1}{e^x + 1} e^x$$

$$\text{Άρα } f'(\xi) = \frac{e^\xi}{e^\xi + 1} < 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 1$$

16.

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta \cdot e$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $\ln(\alpha \cdot e) < \ln\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \ln(\beta \cdot e)$

Δημιουργούμε το κλάσμα του Θ.Μ.Τ

$$\ln \alpha + \ln e < \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right) < \ln \beta + \ln e$$

$$\ln \alpha + 1 < \frac{1}{\beta - \alpha} (\ln \beta^\beta - \ln \alpha^\alpha) < \ln \beta + 1$$

$$\ln \alpha + 1 < \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha) < \ln \beta + 1$$

$$\ln \alpha + 1 < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln \beta + 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in [\alpha, \beta]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\ln \alpha + 1 < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \ln \beta + 1$

Είναι f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ στα γινόμενα αντίστοιχων συναρτήσεων.

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } f'(x) = (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\text{Άρα } f'(\xi) = \ln \xi + 1$$

$$(1) \Rightarrow \ln \xi + 1 = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$\text{Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι } \ln \alpha + 1 < \ln \xi + 1 < \ln \beta + 1$$

$$\ln \alpha < \ln \xi < \ln \beta$$

$$\alpha < \xi < \beta \quad \text{που ισχύει, αφού } \xi \in (\alpha, \beta)$$

17.

Για την παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α, β]$ συνάρτηση f δίνεται ότι

$$f'(x) + f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in (α, β)$$

Να αποδείξετε ότι $e^α (β - α) < e^β f(β) - e^α f(α) < e^β (β - α)$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε $e^α < \frac{e^β f(β) - e^α f(α)}{β - α} < e^β$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, $x \in [α, β]$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α, β]$ σαν γινόμενο αντίστοιχων συναρτήσεων.

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (α, β)$ ώστε $g'(\xi) = \frac{g(β) - g(α)}{β - α}$

$$g'(\xi) = \frac{e^β f(β) - e^α f(α)}{β - α}$$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε $e^α < g'(\xi) < e^β$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } g'(x) &= (e^x f(x))' = (e^x)' f(x) + e^x f'(x) \\ &= e^x f(x) + e^x f'(x) \\ &= e^x [f(x) + f'(x)] = e^x \cdot 1 = e^x \end{aligned}$$

Άρα $g'(\xi) = e^\xi$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε $e^α < e^\xi < e^β$
ή $α < \xi < β$ που ισχύει αφού $\xi \in (α, β)$

18.

Να αποδείξετε ότι $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε $\ln(e^e \cdot \pi^\pi) > \ln e^{2\pi}$

$$\ln e^e + \ln \pi^\pi > 2\pi \ln e$$

$$e \ln e + \pi \ln \pi > 2\pi$$

$$e + \pi \ln \pi > \pi + \pi$$

$$\pi \ln \pi - \pi > \pi - e$$

$$\pi (\ln \pi - 1) > \pi - e$$

$$\pi (\ln \pi - \ln e) > \pi - e$$

$$\frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e} > \frac{1}{\pi}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x \in [e, \pi]$

f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[e, \pi]$, με Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$

υπάρχει $\xi \in (e, \pi)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e}$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(\xi) > \frac{1}{\pi}$

Αλλά $f'(x) = \frac{1}{x}$, άρα $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi}$ δηλαδή

$\pi > \xi$ που ισχύει, αφού $\xi \in (e, \pi)$

19.

Για κάθε $x \in [1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < 1$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < 1$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} < 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{x+1} < \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} < 1$

* Προσοχή, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι t και όχι x .

Είναι f παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{x+1} < f'(\xi) < 1$

Αλλά $f'(t) = (\ln t)' = \frac{1}{t} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < 1$

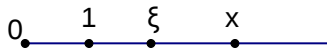
- Για την ανίσωση $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \xi < x+1$ που ισχύει, αφού $\xi \in (x, x+1)$
- Για την ανίσωση $\frac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow 1 < \xi$ που ισχύει αφού $1 \leq x < \xi$

20.

Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$

Προτεινόμενη λύση

- Για $x = 1$, είναι $\ln 1 \leq 1 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει ως ισότητα .
- Για $x > 1$



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\ln x - \ln 1 < x - 1$

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} < 1 \quad (\text{διαιρέσαμε με } x - 1 > 0)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $t \in [1, x]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < 1$

* Προσοχή, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι t και όχι x .

Είναι f παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο διάστημα $[1, x]$

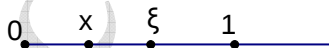
Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (1, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(\xi) < 1$

$$\text{Αλλά } f'(t) = (\ln t)' = \frac{1}{t} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{\xi} < 1$ δηλαδή $1 < \xi$ που ισχύει

- Για $0 < x < 1$



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\ln x - \ln 1 < x - 1$

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} > 1 \quad (\text{διαιρέσαμε με } x - 1 < 0)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$, $t \in [x, 1]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > 1$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ, όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

21.

Για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $x - x^2 < \ln(1 + x) < x$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x - x^2 < \ln(1 + x) - \ln 1 < x$

$$1 - x < \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} < 1$$

$$1 - x < \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} < 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln(1 + t)$, $t \in [0, x]$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $1 - x < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 1$

* Προσοχή, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι t και όχι x .

Είναι f παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο διάστημα $[0, x]$

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $1 - x < f'(\xi) < 1$

$$\text{Αλλά } f'(t) = (\ln(1 + t))' = \frac{1}{1+t} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $1 - x < \frac{1}{1+\xi} < 1$

- Για την ανίσωση $1 - x < \frac{1}{1+\xi}$

$$(1 - x)(1 + \xi) < 1$$

$$1 + \xi - x - x\xi < 1$$

$$\xi - x - x\xi < 0$$

$$\xi < x + x\xi$$

$$\xi < x(1 + \xi) \text{ που ισχύει, αφού } \xi < x < x(1 + \xi)$$
- Για την ανίσωση $\frac{1}{1+\xi} < 1$

$$1 < 1 + \xi \text{ που ισχύει}$$

22.

Για κάθε $\alpha \geq 1$ και $x > 0$, να αποδείξετε ότι $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

Προτεινόμενη λύση

- Για $\alpha = 1$, προφανώς ισχύει ως ισότητα
- Για $\alpha > 1$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(1+x)^\alpha - 1 \geq \alpha x$

$$(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha \geq \alpha x$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha}{x} \geq \alpha$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha}{x-0} \geq \alpha$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = (1+t)^\alpha$, $t \in [0, x]$

* Προσοχή, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι t και όχι x .

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \alpha$

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(\xi) \geq \alpha$

Αλλά $f'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(\xi) = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1}$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha(1+\xi)^{\alpha-1} \geq \alpha$

$$(1+\xi)^{\alpha-1} \geq 1$$

$1+\xi \geq 1$ που ισχύει, αφού $\xi > 0$

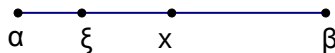
23.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a) = 0$ και $|f'(x)| \leq \gamma$, $x \in (a, \beta)$, όπου $\gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\gamma(a - \beta) < f(x) < \gamma(\beta - a), \quad x \in (a, \beta).$$

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x \in (a, \beta)$ τυχαίο.



f συνεχής στο διάστημα $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x) .

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi \in (a, x) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} \Rightarrow$$

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{f(x)}{x - a} \right|$$

$$|f'(\xi)| = \frac{|f(x)|}{|x - a|}$$

$$|f'(\xi)| = \frac{|f(x)|}{x - a}, \text{ αφού } x - a > 0 \quad (1)$$

$$\text{Για } x = \xi, \text{ η υπόθεση } |f'(x)| \leq \gamma \Rightarrow |f'(\xi)| \leq \gamma \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{|f(x)|}{x - a} \leq \gamma$$

$$|f(x)| \leq \gamma(x - a) \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } 0 < x - a < \beta - a \Rightarrow \gamma(x - a) < \gamma(\beta - a)$$

$$(2) \Rightarrow |f(x)| < \gamma(\beta - a) \Rightarrow -\gamma(\beta - a) < f(x) < \gamma(\beta - a)$$

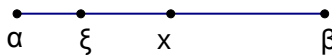
Ιδιότητα των απολύτων
 $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

$$\gamma(a - \beta) < f(x) < \gamma(\beta - a)$$

24.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a) = a$ και $0 < f'(x) < 1$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $a < f(x) < \beta$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Προτεινόμενη λύση



Έστω $x \in (a, \beta)$ τυχαίο.

f συνεχής στο διάστημα $[a, x]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x) .

$$\text{Θ.Μ.Τ} \Rightarrow \text{υπάρχει } \xi \in (a, x) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - a}{x - a} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά, από υπόθεση είναι } 0 < f'(\xi) < 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0 < \frac{f(x) - a}{x - a} < 1$$

$$0 < f(x) - a < x - a$$

$$a < f(x) < x$$

$$\text{αλλά } x \leq \beta, \text{ οπότε } a < f(x) < \beta$$

25.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι

i) $f'(\alpha) < f(\alpha+1) - f(\alpha) < f'(\alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) $f(\alpha+1) + f(\alpha+2) < f(\alpha) + f(\alpha+3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

f παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$.

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha+1) - f(\alpha)}{\alpha+1 - \alpha}$

$$f'(\xi) = f(\alpha+1) - f(\alpha) \quad (1)$$

$\alpha < \xi < \alpha+1$ και f' γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\alpha+1) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$

$$f'(\alpha) < f(\alpha+1) - f(\alpha) < f'(\alpha+1)$$

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha+1) - f(\alpha) < f(\alpha+3) - f(\alpha+2)$

f παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$.

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha+1) - f(\alpha)}{\alpha+1 - \alpha}$

$$f'(\xi) = f(\alpha+1) - f(\alpha) \quad (2)$$

Ομοίως, υπάρχει $\theta \in (\alpha+2, \alpha+3)$ ώστε $f'(\theta) = \frac{f(\alpha+3) - f(\alpha+2)}{(\alpha+3) - (\alpha+2)}$

$$f'(\theta) = f(\alpha+3) - f(\alpha+2) \quad (3)$$

Λόγω των (2), (3), αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(\xi) < f'(\theta)$,

που ισχύει, αφού $\xi < \theta$ και f' γνησίως αύξουσα.

26.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$. Αν f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$, να αποδείξετε ότι $f(5) - f(1) > 2[f(4) - f(2)]$

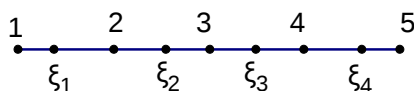
Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά $\Sigma = f(5) - f(1) - 2[f(4) - f(2)] > 0$

Είναι $\Sigma = f(5) - f(1) - 2f(4) + 2f(2)$

$$\Sigma = f(5) - f(1) - f(4) - f(4) + f(2) + f(2) + f(3) - f(3)$$

$$\Sigma = [f(2) - f(1)] - [f(3) - f(2)] - [f(4) - f(3)] + [f(5) - f(4)] \quad (1)$$



Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1, 2] \Rightarrow$

υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$

Ομοίως, υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$ ώστε $f'(\xi_2) = f(3) - f(2)$

υπάρχει $\xi_3 \in (3, 4)$ ώστε $f'(\xi_3) = f(4) - f(3)$

υπάρχει $\xi_4 \in (4, 5)$ ώστε $f'(\xi_4) = f(5) - f(4)$

$$(1) \Rightarrow \Sigma = f'(\xi_1) - f'(\xi_2) - f'(\xi_3) + f'(\xi_4)$$

$$\Sigma = [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)] + [f'(\xi_4) - f'(\xi_3)] \quad (2)$$

$\xi_1 < \xi_2$ και f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$, άρα και στο $[\xi_1, \xi_2]$

$$\Rightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow f'(\xi_1) - f'(\xi_2) > 0$$

$\xi_3 < \xi_4$ και f' γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, 5]$, άρα και στο $[\xi_3, \xi_4]$

$$\Rightarrow f'(\xi_3) < f'(\xi_4) \Rightarrow f'(\xi_4) - f'(\xi_3) > 0$$

$$(2) \Rightarrow \Sigma > 0$$